

Н. Д. Минченков (студ.), С. К. Чуракова (д.т.н., проф.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Уфимский государственный нефтяной технический университет,
кафедра нефтехимии и химической технологии
450064, г. Уфа, ул. Космонавтов, 1; e-mail: nminch02@mail.ru

N. D. Minchenkov, S. K. Churakova

DIFFERENTIAL EQUATION OF THERMAL CONDUCTIVITY AND CONVECTIVE HEAT TRANSFER IN A CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

Ufa State Petroleum Technological University
1, Kosmonavtov Str., 450064, Ufa, Russia; e-mail: nminch02@mail.ru

Представлен алгоритм вывода основного дифференциального уравнения теплопроводности неподвижной среды в цилиндрической системе координат. Известны варианты данного уравнения для одно- и двумерных осесимметричных температурных полей. В данной работе показан наиболее общий вид данного уравнения для трехмерного поля и доказана тождественность двух уравнений в разных системах координат. На примере одномерного углового поля получены интегральные уравнения теплопроводности для трех видов одномерных температурных полей по направлениям. Обоснована применимость дифференциального уравнения в цилиндрических координатах для описания теплопроводности плоской стенки. Для случая движущегося потока жидкости выведено дифференциальное уравнение конвективного теплообмена и уравнение сплошности и неразрывности потока в цилиндрических координатах.

Ключевые слова: декартовы координаты; дифференциальное уравнение теплопроводности; конвективный теплообмен; температурное поле; теплопроводность неподвижной среды; уравнение Лапласа; уравнение сплошности и неразрывности потока; уравнение Фурье; цилиндрическая система координат.

Адекватное описание явлений теплопередачи является очень важной задачей¹ как с теоретической позиции, так и с точки зрения практического использования теплообменного и другого технологического оборудования. Теплопередача посредством теплопроводности в неподвижной среде описывается основным дифференциальным

The paper considers the derivation of the basic differential equation of thermal conductivity of a stationary medium in a cylindrical coordinate system. The sources mainly contain variants of this equation for one- and two-dimensional axisymmetric temperature fields. In this paper, the most general form of this equation for a three-dimensional field is obtained and the identity of the two equations in different coordinate systems is shown, which confirms the fundamental reliability and applicability of the obtained equation. An example of a one-dimensional angular field and integral equations of thermal conductivity for three types of one-dimensional temperature fields in directions are also given. The applicability of the differential equation in cylindrical coordinates to describe the thermal conductivity of a flat wall is shown. The differential equation of convective heat transfer and the equation of continuity and continuity of the flow in cylindrical coordinates are also given.

Key words: Cartesian coordinates; convective heat transfer; cylindrical coordinate system; differential equation of thermal conductivity; Fourier equation; Laplace equation; temperature field; the equation of continuity and continuity of the flow; thermal conductivity of a stationary medium.

уравнением теплопроводности, которое в наиболее общем виде выглядит так:

$$\frac{\partial(\rho c t)}{\partial \tau} = \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right)}{\partial z} + F \quad (1)$$

где $F = F(x, y, z)$ – плотность тепловых источников.

Дата поступления 18.01.24

При $\lambda, \rho, c = \text{const}$ данное уравнение переходит в уравнение (2)²:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t \quad (2),$$

где $a = \lambda / (\rho c)$ – коэффициент температуропроводности.

Данное уравнение является универсальным в фундаментальном смысле, поскольку может быть получено не только в скалярной форме при выделении элементарного объема в виде прямоугольного параллелепипеда, но и векторной – при выделении объема произвольной формы. Однако аналитическое решение из него возможно получить только для одномерного поля. Таким способом удается получить уравнение теплопроводности плоской стенки в интегральной форме, но невозможно получить уравнение теплопроводности цилиндрической стенки, так как в декартовых координатах температурное поле не является одномерным даже при допущении, что температура меняется только по толщине стенки. Для получения интегрального уравнения теплопроводности цилиндрической стенки применялось уравнение Фурье в своем исходном виде.

Материалы и методы

При описании процессов в цилиндрических телах, в том числе центрально-симметричных полей, уместно использовать цилиндрическую систему координат³. Рассмотрим модель элементарного объема, представленную на рис. 1.

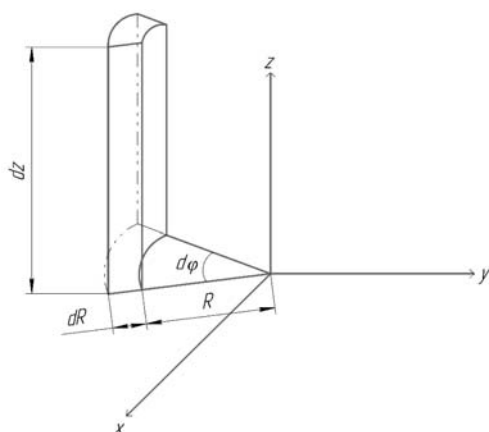


Рис. 1. Элементарный цилиндрический объем

Выделим входящие в элементарный объем и выходящие из него тепловые потоки по каждому из трех направлений: радиальному, вертикальному и угловому, и найдем их разности из уравнения Фурье. Учитывая выражение для градиента в цилиндрических координатах, изменение сечения потока в

радиальном направлении, а также пренебрегая бесконечно малыми слагаемыми более высокого порядка, получаем такую сумму изменений тепловых потоков по всем трем направлениям:

$$\begin{aligned} \sum dQ = dQ_z + dQ_\phi + dQ_R = & \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} R dR dz d\phi d\tau + \\ & + \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial R^2} R dR d\phi dz d\tau + \frac{\lambda}{R} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} d\phi R dR dz d\tau + \lambda dt d\phi dz d\tau \end{aligned} \quad (3)$$

Приравнявая это к изменению температуры элементарного объема $R dR d\phi dz$ за время $d\tau$ и сокращая одинаковые множители, получаем:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial t}{\partial R} \right] \quad (4)$$

Данное выражение является основным дифференциальным уравнением теплопроводности неподвижной среды в цилиндрических координатах и связывает временное и конвективное (за счет изменения пространственной координаты)⁴ приращение температуры. Для стационарного процесса теплопередачи оно переходит в уравнение (5):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial t}{\partial R} = 0, \quad (5)$$

что является уравнением Лапласа в цилиндрических координатах⁵. Таким образом, данное уравнение равносильно стационарному варианту уравнения (2), а значит верно.

Результаты и их обсуждение

Ранее говорилось, что уравнение (1) и его частный случай (2) не позволяют получить аналитическое решение для стационарной теплопроводности цилиндрической стенки при условии, что температура меняется только по толщине, поскольку в этом случае температурное поле не является одномерным в декартовых координатах. В свою очередь уравнение (5) позволяет сделать это, так как в цилиндрической системе поле будет одномерным. Переходя к полным дифференциалам, получаем:

$$\frac{dt}{dR} = -R \frac{d^2 t}{dR^2}$$

Решением данного дифференциального уравнения будет выражение:

$$t = C_1 \ln R + C_2 \quad (6)$$

Данное выражение является уравнением теплопроводности цилиндрической стенки для одномерного радиального температурного поля в интегральной форме.

В литературе встречается информация о применении цилиндрической системы координат для частных случаев решения задач о распределении температур в цилиндрических телах, однако во многих из них рассматриваются только одномерные радиальные или двумерные (осесимметричные, по радиальному и линейному направлениям) поля⁶⁻⁸, поскольку такие ситуации действительно очень распространены в промышленной практике. При этом температура принимается не зависящей от угла. Однако в некоторых случаях наблюдается также зависимость температуры от угловой координаты. В качестве примера можно привести трубопровод с греющими кабелями или коаксиальными нагревателями⁹. Иногда греющие кабели намотаны на трубы по спирали, и тогда температурное поле становится трехмерным (приходится также учитывать плотность источников тепла). В самом простом случае один греющий кабель проложен вдоль стенки трубы соосно (рис. 2)¹⁰.

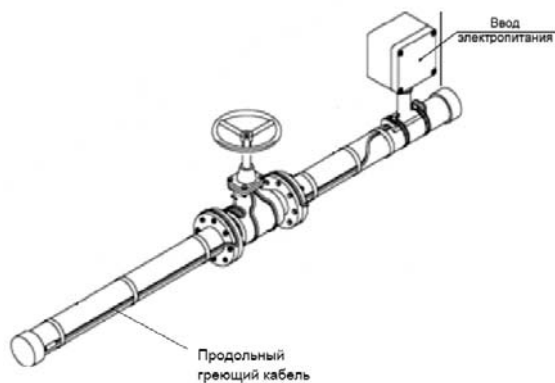


Рис. 2. Трубопровод с соосным греющим кабелем

В этом случае из выражения (5) получаем линейное уравнение зависимости температуры от угла:

$$t = C_1\varphi + C_2 \quad (7)$$

Линейное убывание температуры должно наблюдаться на отрезке $[0; \pi]$ в обоих направлениях от источника тепла. Отметим, что данное уравнение учитывает лишь теплопроводность самой стенки, но не учитывает конвективную передачу тепла в среде теплоносителя внутри данной трубы, а также излучение, а значит справедливо только для пустой трубы, для которой также можно пренебречь теплопередачей за счет излучения.

Добавим, что основное дифференциальное уравнение теплопроводности, полученное в цилиндрических координатах, также может быть применено к стационарному режиму теплопроводности плоской стенки для случая, когда температура меняется по толщине. Необходимо рассмотреть слу-

чай, когда направление температурного градиента параллельно оси z (ось перпендикулярна плоскости стенки). Интегрируя уравнение (5), получаем

$$t = C_1z + C_2, \quad (8)$$

то есть то же самое уравнение теплопроводности плоской стенки, которое следует из дифференциального уравнения в декартовых координатах.

Следует отметить, что пока нами была рассмотрена теплопроводность только неподвижной среды, а перевод уравнения конвективной теплопроводности в цилиндрические координаты для цилиндрических потоков также уместен¹¹. В газовой и нефтедобыче важной задачей является установление распределения температур в цилиндрическом потоке газа либо смеси жидкостей¹² в скважине, в общей технологической практике также необходимо знать распределение температур в потоке жидкости в трубах теплообменников и реакционных аппаратов.

Рассматривая ту же самую модель элементарного цилиндрического объема, что и для неподвижной среды, получаем дифференциальное уравнение конвективного теплообмена:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial t}{\partial R} \right] - \left[\frac{\partial(w_z t)}{\partial z} + \frac{\partial(w_R t)}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(w_\varphi t)}{\partial \varphi} + \frac{w_R t}{R} \right] \quad (9)$$

Массы жидкости, входящей в элементарный объем по направлению R за время $d\tau$ и выходящей из него с противоположной стороны, с учетом изменения сечения потока, равны соответственно:

$$M_R = \rho w_R R d\varphi dz d\tau$$

$$M_{R+dR} = \left(\rho w_R + \frac{\partial(\rho w_R)}{\partial R} dR \right) (R + dR) d\varphi dz d\tau$$

Приращение массы жидкости по направлению R составит

$$dM_R = M_R - M_{R+dR} = -\rho w_R dR d\varphi dz d\tau - \frac{\partial(\rho w_R)}{\partial R} R dR d\varphi dz d\tau - \frac{\partial(\rho w_R)}{\partial R} (dR)^2 d\varphi dz d\tau \approx -\rho w_R dR d\varphi dz d\tau - \frac{\partial(\rho w_R)}{\partial R} R dR d\varphi dz d\tau,$$

поскольку слагаемое $-\frac{\partial(\rho w_R)}{\partial R} (dR)^2 d\varphi dz d\tau$ является бесконечно малым высшего порядка.

Аналогично находим приращения массы по направлениям z и φ

$$dM_z = -\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} R dR dz d\varphi d\tau$$

$$dM_\varphi = -\frac{\partial(\rho w_\varphi)}{\partial \varphi} R dR d\varphi dz d\tau$$

Суммируя приращения по направлениям и приравнявая это к приращению массы элементарного объема за счет изменения плотности, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = - \left[\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(\rho w_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} + \frac{\rho w_R}{R} + \frac{\partial(\rho w_R)}{\partial R} \right]$$

Для стационарного потока несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), получаем:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_R}{\partial R} + \frac{w_R}{R} = 0$$

Данное уравнение является уравнением сплошности и неразрывности потока несжимаемой жидкости и представляет собой дивергенцию вектора скорости в цилиндрических координатах¹³, аналогично выражению

$$\text{div} w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0,$$

являющемуся уравнением сплошности и неразрывности потока несжимаемой жидкости в декартовых координатах.

Литература

1. Бобков С.П., Галиаскаров Э.Г. Моделирование процесса теплопроводности с использованием систем клеточных автоматов // Программные продукты и системы. – 2020. – Т.33, №4. – С.641-650.
2. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.: Рипол Классик, 2013. – 190 с.
3. Карташов Э.М. Новые соотношения для аналитических решений локально-неравновесного теплообмена // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2023. – №6(111). – С.4-24.
4. Рындин В.В. Локальное, конвективное и полное приращения и производные по времени поля физической величины // Наука и техника Казахстана. – 2009. – №1. – С.129-138.
5. Спивак-Лавров И.Ф., Шарипов С.У., Шугаева Т.Ж. Решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах, приводимые к двумерным гармоническим потенциалам // Научное приборостроение. – 2020. – Т.30, №2. – С.51-60.
6. Чермошнцева А. А. Течение теплоносителя в геотермальной скважине // Математическое моделирование. – 2006. – Т.18, №4. – С.61-76.

Раскрывая производные во втором слагаемом уравнения (9), получаем:

$$\frac{\partial(w_z t)}{\partial z} + \frac{\partial(w_R t)}{\partial R} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial(w_\varphi t)}{\partial \varphi} + \frac{w_R t}{R} =$$

$$= t \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial w_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_R}{\partial R} + \frac{w_R}{R} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R} \cdot w_\varphi \frac{\partial t}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} + w_R \frac{\partial t}{\partial R}$$

Тогда с учетом (10) для неразрывного потока несжимаемой жидкости дифференциальное уравнение конвективного теплообмена (9) сводится к виду:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial t}{\partial R} \right] -$$

$$- \left[\frac{1}{R} \cdot w_\varphi \frac{\partial t}{\partial \varphi} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} + w_R \frac{\partial t}{\partial R} \right]$$

Таким образом, на основе модели элементарного объема нами получено основное дифференциальное уравнение теплопроводности неподвижной среды в цилиндрических координатах, из которого можно вывести интегральную форму уравнения теплопроводности плоской стенки. Для случая движущегося потока жидкости выводится дифференциальное уравнение конвективного теплообмена и уравнение сплошности и неразрывности потока, также в цилиндрической системе координат. Все это демонстрирует универсальность и практическую применимость предложенной модели и полученных уравнений.

References

1. Bobkov S.P., Galiaskarov E.G. *Modelirovanie protsessa teploprovodnosti s ispol'zovaniem sistem kletochnykh avtomatov* [Simulation of the thermal conductivity process using cellular automata systems]. *Programmnye produkty i sistemy* [Software products and systems], 2020, vol.33, no.4, pp.641-650.
2. Veinik A.I. *Priblizhennyi raschet protsessov teploprovodnosti* [Approximate calculation of thermal conductivity processes]. Moscow, Ripol Klassik Publ., 2013, 190 p.
3. Kartashov E.M. *Novyye sootnosheniya dlya analiticheskikh resheniy lokal'no-neravnovesnogo teploobmena* [New relations for analytical solutions of locally nonequilibrium heat transfer]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki* [Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. The Natural Sciences series], 2023, no. 6(111), pp.4-24.
4. Ryndin V.V. *Lokal'noe, konvektivnoe i polnoe prirashcheniya i proizvodnye po vremeni polya fizicheskoy velichiny* [Local, convective and total increments and time derivatives of the field of a physical quantity]. *Nauka i tekhnika Kazakhstana* [Science and technology of Kazakhstan], 2009, no.1, pp.129-138.

7. Горбунов В.А., Иванова Н.Б., Лоншаков Н.А., Белов Я.В. Разработка модели по определению температурного поля твэла в двумерной постановке задачи // Известия высших учебных заведений. Ядерная энергетика. – 2019. – №2. – С.174-184.
8. Левченко В.А., Кашеев М.В., Дорохович С.Л., Зайцев А.А. Двумерная задача нестационарной теплопроводности в многослойных пластине и цилиндре // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. – 2020. – №2. – С.141-149.
9. Крапивский Е.И., Вишняков И.А. Об особенностях эксплуатации трубопровода, оснащенного системой электроподогрева // ГИАБ. – 2012. – №7. – С.319-322.
10. ГОСТ ИЕС 62395-1-2016 Системы обогрева трубопроводов, работающие на электрическом сопротивлении, для промышленного и коммерческого применения. Часть 1. Общие требования и требования к испытаниям. – М.: Стандартиформ, 2017. – 39 с.
11. Моисеева Л. А., Черкасов С. Г. Стационарный свободно-конвективный теплообмен в цилиндрической емкости при равномерном теплоподводе и одновременном отводе тепла через локальные стоки // Теплофизика высоких температур. – 1997. – Т.35, №4. – С.564-569.
12. Филиппов А. И., Ахметова О. В., Рогов В. А. Математическое моделирование температурного поля цилиндрического потока смеси жидкостей // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2011. – №3(42). – С.456-460.
13. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Реберно-ориентированная аппроксимация уравнений Навье-Стокса для осесимметрических течений на неструктурированной сетке. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2017. – 24 с.
5. Spivak-Lavrov I.F., Sharipov S.U., Shugaeva T.Zh. *Resheniya uravneniya Laplasy v tsilindricheskikh koordinatakh, privodimyye k dvumernym garmonicheskim potentsialam* [Solutions of the Laplace equation in cylindrical coordinates, resulting in two-dimensional harmonic potential]. *Nauchnoye priborostroyeniye* [Scientific instrumentation], 2020, vol.30, no.2, pp.51-60.
6. Chermoshentseva A.A. *Techenie teplonositelya v geotermal'noy skvazhine* [Coolant flow in a geothermal well]. *Matematicheskoe modelirovaniye* [Math modeling], 2006, vol.18, no.4, pp.61-76.
7. Gorbunov V.A., Ivanova N.B., Lonshakov N.A., Belov Ya.V. *Razrabotka modeli po opredeleniyu temperaturnogo polya tvela v dvumernoy postanovke zadachi* [Development of a model for determining the fuel element temperature field in a two-dimensional formulation of the problem]. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedeniy. Yadernaya energetika* [News of higher educational institutions. Nuclear energy], 2019, no.2, pp.174-184.
8. Levchenko V.A., Kashcheev M.V., Dorokhovitch S.L., Zaitsev A.A. *Dvumernaya zadacha nestatsionarnoy teploprovodnosti v mnogosloynnykh plastine i tsilindre* [Two-dimensional problem of nonstationary thermal conductivity in a multilayer plate and cylinder]. *Voprosy atomnoy nauki i tekhniki. Seriya: Yaderno-reaktornyye konstanty* [Issues of atomic science and technology. Series: Nuclear reactor constants], 2020, no.2, pp.141-149.
9. Krapivskiy E.I., Vishnyakov I.A. *Ob osobennostyakh ekspluatatsii truboprovoda, osnashchennogo sistemoy elektropodogreva* [About the specifics of the operation of a pipeline equipped with an electric heating system]. *GIAB* [Mining information and analytical bulletin], 2012, no.7, pp.319-322.
10. *GOST IEC 62395-1-2016 Sistemy obogreva truboprovodov, rabotayushchie na elektricheskom soprotivlenii, dlya promyshlennogo i kommercheskogo primeneniya. Chast' 1. Obshchie trebovaniya i trebovaniya k ispytaniyam* [State Standart IEC 62395-1-2016 Pipeline heating systems powered by electrical resistance for industrial and commercial applications. Part 1. General requirements and test requirements]. Moscow, Standartinform Publ., 2017, 39 p.
11. Moiseeva L. A., Cherkasov S. G. *Statsionarnyi svobodno-konvektivnyi teploobmen v tsilindricheskoi emkosti pri ravnomernom teplopodvode i odnovremennom otvode tepla cherez lokal'nye stoki* [Stationary free-convective heat transfer in a cylindrical container with uniform heat removal and simultaneous heat removal through local drains]. *Teplofizika vysokikh temperatur* [Thermophysics of high temperatures], 1997, vol.35, no.4, pp.564-569.
12. Filippov A. I., Akhmetova O. V., Rogov V. A. *Matematicheskoe modelirovaniye temperaturnogo polya tsilindricheskogo potoka smesi zhidkostey* [Mathematical modeling of the temperature field of a cylindrical flow of a mixture of liquids]. *Vestnik Khersonskogo natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Kherson National Technical University], 2011, no.3 (42), pp.456-460.
13. Bakhvalov P. A., Kozubskaya T. K. *Reberno-orientirovannaya approksimatsiya uravneniy Nav'yey-Stoksa dlya osesimmetricheskikh techeniy na nestrukturirovannoy setke* [A ray-oriented approximation of the Navier-Stokes equations for axisymmetric flows on an unstructured grid]. Moscow, IPM im. M.V. Keldysha RAN Publ., 2017, 24 p.